STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

ZW 1948-010

De functie $\tau(n)$ van S. Ramanujan

"Actualiteiten"

F. v.d. Blij

1948

8/15 Maart 1948.

Actualiteiten

20 Maart 1948.

De functie $\tau(n)$ van S. Ramanujan: voordracht door F. v.d. Blij.

"Alle wegen leiden naar Rome;
Daar kan vergissing bestaan.
Om in die oude stad te komen,
Houde men slechts de grote baan"

(Bertus Aafjes: Een voetreis naar Rome)

Inhoud:

§ 1. Inleiding, congruenties.
§ 2. Modulaire eigenschappen.
§ 3. De coefficienten in de machtreeksontwikkeling naar $x = e^{2\pi i\tau}$ van modulaire vormen.
§ 4. Dirichlet reeksen.
§ 5. Even kwadratische vormen met determinant 1.
§ 6. Diverse opmerkingen.
§ 7. Literatuurlijst.

§ 1. Inleiding, congruenties.

"Trek de woestijn in,
laat de karavaan
den groenen rijkdom der oasen;
U zij de dorre oceaan
van zand;....."

(H. Marsman: Voorschrift).

De functie $\tau(n)$ wordt voor ieder natuurlijk getal n gedefinieerd als de coefficient van x^n in de machtreeksontwikkeling van de functie $x\{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\ldots\}^{24}$. Voor $|x|<1$ convergeert dit product. Het lijkt of we beland zijn in een van de verste uithoeken van het rijk der wiskunde, "into one of the backwaters" zegt Hardy.
En toch, alle hoofdwegen in het gebied van de onderzoekingen over kwadratische vormen en hun toegevoegde ζ-functies en Dirichletreeksen, elliptische functies en integralen, modulaire vormen en functies leiden naar deze getallen en naar de functie toe.

Zo zullen we problemen vinden, één b.v. volkomen analoog met het vermoeden van Riemann voor de ζ functie en evenmin opgelost.

Bij Ramanujan[1] vinden we een kleine tabel voor $\tau(n)$ voor $1 \leqslant n \leqslant 30$, later heeft Lehmer[2] een tabel voor $1 \leqslant n \leqslant 300$ gepubliceerd. We citeren even

$\tau(1) = 1$; $\tau(2) = -24$; $\tau(3) = 252$; $\tau(4) = -1472$; $\tau(5) = 4830$;
$\tau(6) = -6048$; $\tau(7) = -16744$.

In het vervolg gebruiken we de volgende identiteiten:

$$\prod_{1}^{\infty}(1-x^n) = \sum_{-\infty}^{+\infty}(-1)^n x^{\frac{1}{2}n(3n+1)} \qquad \text{(Euler)}$$

(Een elementair bewijs van F. Franklin [1] vindt men in Hardy-Wright [6] en Hardy [3])

$$\prod_{1}^{\infty}(1-x^n)^3 = \sum_{0}^{\infty}(-1)^n(2n+1)x^{\frac{1}{2}n(n+1)} = x^{-\frac{1}{8}}\sum_{-\infty}^{+\infty}(-)^n(n+\tfrac{1}{2})x^{\frac{1}{2}(n+\frac{1}{2})^2}$$

(Jacobi)

Ook gebruiken we nog dat ieder getal n op $16\sigma(2n+1)$ resp. $256.8^{\nu}\sigma_k(n+1)$ manieren voorgesteld kan worden door de som van vier resp. acht driehoeksgetallen $\{t_n = \frac{1}{2}n(n+1)\}$. Hierin stelt $\sigma_k(n)$ de som van de k^{de} machten van alle positieve delers van n voor, $\sigma(n) = \sigma_1(n)$, en 2^{ν} is de hoogste macht van twee, die in n+1 opgaat (Formule van Legendre).

Enkele eigenschappen van $\tau(n)$ kunnen we met behulp van bovenstaande identiteiten bewijzen.

i) Voor oneven n geldt $\tau(n) \equiv \sigma(n) \pmod 8$: Rambah, Chowla, Gupta [5].
We gaan uit van $(1-x)^8 \equiv (1-x^2)^4 \pmod 8$, d.w.z. $(1-x)^8 = (1-x^2)^4 + 8J$, waarin J een veelterm met gehele coefficienten is. Nu is dus

$$\sum \tau(n)x^n \equiv x\{(1-x^2)(1-x^4)\cdots\cdots\}^8 \pmod 8,$$

$$\equiv x\left\{\sum_{0}^{\infty}(-1)^n(2n+1)x^{n(n+1)}\right\}^4 \pmod 8,$$

$$\equiv x\left\{\frac{1}{2}\sum_{-\infty}^{+\infty}x^{n(n+1)}\right\}^4 \pmod 8,$$

$$\equiv x\sum_{0}^{+\infty}\sigma(2k+1)x^{2k} \pmod 8,$$

$$\equiv \sum_{0}^{\infty}\sigma(2k+1)x^{2k+1} \pmod 8$$

Dus $\tau(2k+1) \equiv \sigma(2k+1) \pmod 8$,
$\tau(2k) \equiv 0 \pmod 8$.

ii) Verder bewijzen we $\tau(7n+k) \equiv 0 \pmod 7$ als $k = 3, 5, 6$;
(Hardy [3])

$$\sum \tau(n)x^n = x\prod(1-x^n)^{24} \cdot \prod(1-x^n)^8$$

Nu is $(1-x^n)^7 \equiv (1-x^{7n}) \pmod 7$, dus $(1-x^n)^8 \equiv 1 - 3x^{7n} + 3x^{14n} - x^{21n} \pmod 7$
en $\prod(1-x^n)^{24} = \sum c_\mu x^\mu$ waarin voor alle μ geldt $\mu c_\mu \equiv 0 \pmod 7$.
Met de formule van Jacobi vinden we nu

$$\sum \tau(n)x^n = \sum_{\mu=0}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^\nu(2\nu+1)c_\mu x^{\frac{1}{2}\nu(\nu+1)+\mu+1},$$

$$\tau(n) = \sum(-1)^\nu(2\nu+1)c_\mu$$

Hierin moet gesommeerd worden over alle $\mu, \nu \geq 0$ met $n = \frac{1}{2}\nu(\nu+1) + \mu + 1$. Nu is $\frac{1}{2}\nu(\nu+1) \equiv 0, 1, 3, 6 \pmod 7$ dus $n - \mu \equiv 0, 1, 2, 4 \pmod 7$. Als $n \equiv 3, 5, 6 \pmod 7$ is dus $\mu \not\equiv 0 \pmod 7$ en dus alle voorkomende $\sigma_\lambda \equiv 0 \pmod 7$.

(ii) Geheel analoog bewijzen we uit

$$\sum \tau(n) x^n = x \prod (1-x^n)^{23} \prod (1-x)^n$$

dat $\tau(23n + k) \equiv 0 \pmod{23}$ als $k = 5, 7, 10, 11, 14, 15, 19, 20, 21, 22$.
(Ramanujan [2]) (in deze gevallen is het restsymbool $\left(\frac{k}{23}\right) = -1$)

iv). We noemen nog enkele eenvoudige congruenties:
$\tau(n) \equiv \sigma_{11}(n) \pmod{2^{11}}$; n oneven, Bambah, Chowla [4]
$\tau(n) \equiv \sigma_{11}(n) \pmod{3^7}$; n oneven Bambah [1]
$\tau(n) \equiv (n^2 + k)\sigma_7(n) \pmod{3^4}$; $k = 0$ als $n \not\equiv 0, 1 \pmod 3$, $k = 9$ als $n \equiv 2 \pmod 3$ Bamban, Chowla [4]
$\tau(n) \equiv 5n^3\sigma_7(n) - 4n\sigma_9(n) \pmod{5^3}$; $(n,5) = 1$ Bambah, Chowla [4]
$\tau(n) \equiv n^4\sigma(n) \pmod{3^7}$; Bamban, Chowla [3]
$\tau(n) \equiv n\sigma_9(n) \pmod{5^4}$; Bambah [1]
$\tau(n) \equiv n\sigma_3(n) \pmod 7$; Gupta [3], Ramanathan [2], Wilton [2]
$\tau(n) \equiv \sigma_{11}(n) \pmod{691}$; Ramanujan [1] Lehmer [3]

Lahiri [2] heeft onlangs systematisch nagezocht welke congruenties over $\tau(n)$ af te leiden zijn uit een reeks identiteiten uit de theorie van de modulaire vormen, zoals we die bij Ramanujan [1] vinden.

Lahiri publiceert een lijst van [7] congruenties, soms zeer ingewikkeld, soms eenvoudig, we geven een tweetal voorbeelden:

$\tau(n) \equiv n^6\sigma_5(n) \pmod{2^4 3^3 5}$

en

$$5189184\,\tau(n) \equiv -11.691^2\sigma_{13}(n) + 2730(11n + 2719)\sigma_{11}(n) - 691\{6006(65n - 5)\sigma_9(n) - 10336\tau(n)\} \pmod{2^7.3^3.5.7.11.13.691}.$$

Onlangs vond Ferguson bij een numerieke berekening dat de 52ste coefficient in de ontwikkeling van $\prod(1-x)(1-x^2)\ldots$ de eerste coefficient is, die gelijk aan nul wordt. Dit stelde Lehmer [3] voor de vraag of er soms een getal N bestaat met $\tau(N) = 0$. Het kleinste getal met deze eigenschap moet een priemgetal zijn, Lehmer bewees dat dit priemgetal minstens 3.316.799 moet zijn, met de "nieuwe" congruentie $\tau(n) \equiv n^2\sigma(n) \pmod 9$ volgt echter dat ook voor dit getal de $\tau(N) \neq 0$. Met de formules van Lahiri zouden we deze grens nog wel een "flink" eind kunnen verhogen. Op zich zelf is dit natuurlijk vrij zinloos, omdat deze congruentie-

betrekkingen ons niet het middel aan de hand kunnen doen om te bewijzen dat al dan niet voor alle n geldt $\tau(n) \neq 0$. Vermoedelijk zullen diepergaande theorieen gebruikt moeten worden.

§ 2. Modulaire eigenschappen.

"Strings in the earth and air
Make music sweet;
Strings by the river where
The willows meet.

All softly playing,
With head to the music bent,
And fingers straying
Upon an instrument"

(James Joyce: Strings in the Earth)

We schrijven $x = e^{2\pi i \tau}$ en veronderstellen $\Im m(\tau) > 0$. Met de getallen $\tau(n)$ van Ramanujan hangen samen:

de machtreeks $$\sum \tau(n) x^n = x \left\{ \prod_1^\infty (1-x^n) \right\}^{24}$$

de Dirichletreeks (Ramanujan [1] ; Mordell [1])

$$\sum \frac{\tau(n)}{n^s} = \prod_p \left(1 - \tau(p) p^{-s} + p^{11-2s} \right)^{-1}$$

De functie $\Delta(\tau) = e^{2\pi i \tau} \left\{ \prod_1^\infty (1-e^{2\pi i n \tau}) \right\}^{24}$ hangt met de elliptische functies

$$g_2 = \frac{4\pi^4}{3} \left\{ 1 + 240 \sum \sigma_3(n) x^n \right\} = 60 \sum_{m,n}{}' (m+n\tau)^{-4},$$

en $$g_3 = \frac{8\pi^6}{27} \left\{ 1 - 504 \sum \sigma_5(n) x^n \right\} = 140 \sum_{m,n}{}' (m+n\tau)^{-6},$$

door de formule: $\Delta(\tau) = (2\pi)^{-12} \left(g_2^3 - 27 g_3^2 \right)$ samen

Uit deze formule volgt dat $\Delta(\tau+1) = \Delta(\tau)$ en dat $\Delta\left(\frac{-1}{\tau}\right) = \tau^{12} \Delta(\tau)$

Deze twee substituties brengen de modulaire groep voort, d.i. de groep van alle substituties $\frac{a\tau+b}{c\tau+d}$ met gehele a, b, c en d met $ad - bc = 1$.

We vinden dus $$\Delta\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right) = (c\tau+d)^{12} \Delta(\tau)$$

De functie $\Delta(\tau)$ is een modulaire vorm van de dimensie -12.

[Een analytische functie f van τ , die in het halfvlak $\Im(\tau) > 0$ eenduidig en op polen na regulier is, heet een modulaire vorm van dimensie k, als voor alle gehele substituties $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ met $ad - bc = 1$ geldt

$$f\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right) = (c\tau+d)^{k} f(\tau). \quad]$$

Met behulp van deze eigenschap bewees Mordell [1] dat

$$\tau(mn) = \tau(m) . \tau(n) \qquad \text{als } (m,n) = 1 \text{ en}$$

$$\tau(p^\alpha) = \tau(p) \tau(p^{\alpha-1}) - p^{11} \tau(p^{\alpha-2})$$

Als we invoeren $\cos\theta_p = \frac{1}{2}p^{-\frac{11}{2}}\tau(p)$ kunnen we de laatste formule ook schrijven als $\tau(p^\nu) = p^{\frac{11\nu}{2}} \frac{\sin(\nu+1)\theta_p}{\sin\theta_p}$

Nu doet zich als van zelf het probleem voor: is de hoek θ_p steeds reëel? d.w.z. geldt voor alle p dat $|\tau(p)| \leq 2p^{\frac{11}{2}}$?

Dit vermoeden van Ramanujan is nog steeds onbewezen, het blijkt vrij diep te liggen. Het beste wat in deze richting bekend is, is dat $\tau(n) = O(n^{\frac{12}{11}})$, Rankin[3] ; we komen hier direct op terug.

Uit de betrekking $\Delta\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right) = (c\tau+d)^{12}\Delta\tau$ volgt dat het gedrag van $\Delta(\tau)$ in het punt $\tau = p/q$ met gehele rationale p en q nauw samen hangt met het gedrag in het punt $\tau = 0$. Tekenen we de fundamentaalgebieden voor de groep van de modulaire substituties dan komen spitse punten van deze gebieden in de rationale punten uit. Een modulaire vorm, waarvoor die coëff. [illegible] gelijk is aan nul heet een "spitzenform". De theorie van deze "spitzenformen" is van groot belang in de theorie van de modulaire vormen. Dit blijkt uit enkele stellingen, die we hier als voorbeelden noemen: (Hecke [4,5])

Door van een modulaire vorm van even dimensie -k een met een geschikt gekozen constante vermenigvuldigde Eisensteinreeks af te trekken ontstaat een "Spitzenform".

Er is maar één Eisensteinreeks van even dimensie $-k < -2$, te weten

$$G_k(\tau) = \sum'_{(m,n)} (n\tau+m)^{-k} = \alpha_k + \beta_k \sum_1^\infty \sigma_{k-1}(n) x^n$$

met $\alpha_k = 2\zeta(k)$; $\beta_k = 2\frac{(2\pi i)^k}{\Gamma(k)}$

Voor k = 2 en oneven k zijn er geen modulaire vormen van dimensie -k. Voor $k \equiv 2 \pmod{12}$ $k \geq 14$ zijn er precies $\left[\frac{k}{12}\right]$ lineair onafhankelijke modulaire vormen van dimensie -k, voor $k \not\equiv 2 \pmod{12}$ en $k \geq 4$ zijn er precies $\left[\frac{k}{12}\right]+1$. (Feldmann [1])

Uit deze stellingen leiden we direct af, dat er geen "spitzenformen" van even dimensie $-k > -12$ bestaan. Dan is immers iedere modulaire vorm op een factor na gelijk aan de Eisensteinreeks, die geen "spitzenform" is. Voor k = 12 is er één "spitzenform". Deze hebben we al ontmoet, het is de functie $\Delta(\tau)$. De getallen $\tau(n)$ zijn dus de coefficienten van de "spitzenform" met dimensie -12.

Er is geen "spitzenform" van dimensie -14, er is er wel weer één van dimensie -16, etc. Voor dimensie -24 bestaan twee "spitzenformen" [illegible] in de ontwikkeling $\sum c_n e^{2\pi i n\tau}$

§ 3. De coefficienten van de machtreeksontwikkeling naar $x=e^{2\pi i\tau}$ van modulaire vormen.

"Boven dit eindeloos moeras:
een blauwe vogel, af en aan.

In de eeuwige woestijn:
een karavaan.

(G. Achterberg: Bolero van Ravel).

Hoewel de modulaire vormen met niet negatieve dimensie eigenlijk buiten het onderwerp van vandaag staan, wil ik toch iets opmerken over de resultaten, die hier bereikt zijn. Een bekend voorbeeld van een modulaire vorm van positieve dimensie hangt samen met het aantal partities van een getal n.

$$\sum p(n)\,x^n = \prod_1^\infty (1-x^n)^{-1}$$

Dit is niet precies een modulaire vorm, maar voor de functie

$$\eta(\tau) = e^{\frac{\pi i \tau}{24}} \prod_1^\infty (1-e^{2\pi i \tau})$$

geldt de formule: (Rademacher [1]).

$$\eta\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right)^{-1} = \epsilon\,(c\tau+d)^{-\frac{1}{2}}\,\eta(\tau)^{-1}$$

waarin ϵ een eenheidswortel is, die alleen van a, b, c en d afhangt.

Voor de getallen p(n), die dus nauw samenhangen met de coefficienten van deze "modulaire" vorm van dimensie $\frac{1}{2}$, heeft Rademacher [4,5] de volgende convergente reeksontwikkeling gegeven:

$$p(n) = \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \sum_{k=1}^{\infty} A_k(n)\sqrt{k}\,\frac{d}{dn}\left\{ \frac{\sinh \frac{C\sqrt{n-\frac{1}{24}}}{k}}{\sqrt{n-\frac{1}{24}}} \right\};$$

$$C = \tfrac{1}{3}\pi\sqrt{6}\,,\quad A_k(n) = \sum_{h \bmod k}{}' \omega_{h,k}\, e^{-\frac{2\pi i h n}{k}}\,,\quad \omega_{h,k}^{24} = 1.$$

Voor de expliciete uitdrukking van $\omega_{h,k}$ verwijzen we naar Hardy-Ramanujan [4], Rademacher [3].

Om deze formule te bewijzen gebruikte Rademacher een omvorming van het bewijs van een asymptotische formule voor p(n) van Hardy-Ramanujan [4], dat werd geleverd met behulp van een Farey verdeling en een passend gekozen Tauberstelling.

Door J. Lehner [1] werden eveneens convergente reeksen afgeleid voor de getallen $p_1(n)$ en $p_2(n)$, d.i. het aantal partities in positieve getallen van de vorm $5l \pm 1$ en $5l \pm 2$ resp.

Een overzicht over de recente literatuur over partities vinden we bij Kloosterman [2], hier staan ook congruentierelaties voor de p(n), zoals ze voor het eerst door Ramanujan genoemd zijn, vermeld.

Algemener zijn de stellingen van Rademacker-Zuckerman [9] over modulaire vormen van positieve dimensie. Onder enkele algemene voorwaarden, als regulariteit van de vorm, wordt een convergente reeks gevonden voor de coefficienten van de Fourier ontwikkeling naar τ (Laurent ontwikkeling naar x). Deze reeks heeft termen, die opgebouwd zijn uit Kloostermansommen en Besselfuncties I_{n+1}

Vervolgens iets over modulaire vormen van dimensie 0.
Eigenlijk zouden we hier pas iets over mogen vertellen als we de modulaire vormen van negatieve dimensie besproken hadden. De vormen van dimensie 0 zijn n.l. zowel met methoden, die oorspronkelijk bedoeld waren voor positieve dimensie, als zulke voor negatieve dimensie, behandeld.

Voor de coefficienten c_n van de absolute modulaire invariant (modulaire vorm van dimensie nul)

$$12^3 . J(\tau) = \frac{[1+240\sum \sigma_3(n)x^n]^3}{x\prod(1-x^n)^{24}} = e^{-2\pi i\tau} + \sum_0^\infty c_n e^{2\pi i n\tau}$$

geldt de volgende convergente reeksontwikkeling, voor $n \geq 1$,

$$c_n = \frac{2\pi}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k(n)}{k} I_1\left(\frac{4\pi\sqrt{n}}{k}\right),$$

waarin $A_k(n)$ een Kloostermansom is:

$$A_k(n) = \sum_{h \bmod k} e^{\frac{2\pi i}{k}(nh+h')} \qquad hh' \equiv (-1) \pmod k$$

en bovendien geldt: $c_0 = 744$

Peterson [1] werkte vanaf de modulaire vormen van negatieve dimensie, H. Rademacker [6,7] vanaf de theorie van Rademacker-Zuckerman [9] over over vormen met positieve dimensie.

Het wordt tijd, dat we tot ons oorspronkelijke onderwerp terug keren, de modulaire vormen van negatieve dimensie. Nu zijn voor de Fourier coefficienten c_n in de ontwikkeling naar $e^{2\pi i\tau}$ schattingen van de grootte orde bekend. We lopen even de geschiedenis door: In 1927 bewees Hecke [1] dat de getallen c_n voor een modulaire vorm van dimensie -k de gedaante $c_n = n^{k-1}S(n) + O(n^{\frac{1}{2}k})$ $(k \geq 1)$ hebben. Hierin is S(n) de som van de singuliere reeks behorende bij de beschouwde modulaire vorm.

We richten nu verder speciaal onze belangstelling op "spitzenformen"
Hecke [1] bewees in 1927 dat voor "spitzenformen" $c_n = O(n^{\frac{1}{2}k})$ $(k>0)$
Kloosterman [1] bewees in 1927 dat $c_n = O(n^{\frac{1}{2}k - \frac{1}{8}+\varepsilon})$
Uit het werk van Davenport [1] en Salië [1], beide onafhankelijk van elkaar in 1933, volgt $c_n = O(n^{\frac{1}{2}k - \frac{1}{4}+\varepsilon})$
Tenslotte bewees Rankin [1] in 1939 dat $c_n = O(n^{\frac{1}{2}k - \frac{1}{5}})$

Wat betekent dit voor de getallen $\tau(n)$? We willen eerst heel elementair de zeer ruwe schatting $\tau(n) = O(n^7)$ afleiden. Uit de definitie van $\tau(n)$ volgt: $\sum \tau(n) x^n = x\left\{\sum_0^\infty (-1)^n (2n+1) x^{\frac{1}{2}n(n+1)}\right\}^8$

dus $\tau(N) = \sum (-1)^{n_1+n_2+\cdots+n_8}(2n_1+1)(2n_2+1)\cdots\cdots(2n_8+1)$

waarin de som uitgestrekt moet worden over alle oplossingen

$$\tfrac{1}{2}n_1(n_1+1) + \cdots\cdots + \tfrac{1}{2}n_8(n_8+1) = N-1 \qquad \text{of te wel}$$

$$(n_1+\tfrac{1}{2})^2 + \cdots\cdots + (n_8+\tfrac{1}{2})^2 = 2N$$

Nu is dit aantal oplossingen gelijk aan $\mu\sigma_3(N)$, waarin $\mu = 1$ voor oneven N, voor deze oplossingen is steeds $(2n_i+1) \leq \sqrt{2N}$ en dus

$$|\tau(N)| \leq \mu 2^8 \sigma_3(N) N^4$$

Is N een oneven priemgetal dan volgt in het bijzonder $|\tau(N)| < (N^7 + N^4)N^4$

Hieruit volgt direct $\tau(n) = O(n^8)$

Veel scherper schattingen vinden we als we gebruiken dat de getallen $\tau(n)$ de coefficienten zijn van een "spitzenform" van dimensie -12. Hardy bewees in 1918 al dat $\tau(n) = O(n^6)$, wat ook uit Hecke [1] volgt. Uit Kloosterman [1] volgt $\tau(n) = O(n^{11/2+\varepsilon})$, uit Davenport [1] en Salië [1] volgt $\tau(n) = O(n^{23/4+\varepsilon})$. We noemden reeds het best bekende resultaat van Rankin [1]: $\tau(n) = O(n^{23/5})$

Het vermoeden $\tau(n) = O(n^{11/2+\varepsilon})$ van Ramanujan is nog steeds onbewezen. Dit komt neer op een schatting $c_n = O(n^{k/2 - 1/2 + \varepsilon})$ voor de coefficienten van een "spitzenform" van dimensie -k.

Indien we stellen $T(x) = \sum'_{n\leq x} \tau(n)$, waarbij het accent aangeeft dat voor gehele x de laatste term met de factor $\frac{1}{2}$ moet voorzien worden vinden we $T(x) = x^6 \sum_1^\infty \frac{\tau(n)}{n^6} J_{12}\{4\pi(nx)^{\frac{1}{2}}\}$

(Hardy [2]). Verder is bewezen $T(x) = O(x^{5\frac{1}{2}})$ (Rankin [1]).
In een ongepubliceerd onderzoek is bewezen dat niet geldt $T(x) = \Omega(x^{23/4})$
Het vermoeden $T(x) = O(x^{23/4+\varepsilon})$ is nog onbewezen.

We vermelden nog $\tau(1)^2 + \tau(2)^2 + \cdots\cdots + \tau(n)^2 = \alpha n^{12} + O(n^{12-\frac{1}{2}})$
(Rankin [1]).

§ 4. Dirichletreeksen.

"Midden in deze woestenij
van zon, steenen en droog gewas
zie ik op eens mijn eigen land
- onaangetast door deze brand:
bleek water, mist over de wei,
zie ik hoe koel en zacht dat was".

(M. Vasalis. Luchtspiegeling)

Uit een algemene theorie van Hecke (4), te weten die van het gedrag van modulaire vormen onder bepaalde operatoren T_n, kunnen we enkele merkwaardige resultaten lichten. We gebruiken de stellingen 16, 24, 27 en 28 en vinden: (verg. Petersson [3]).

Beschouwen we alle Dirichletreeksen $\varphi(s)=\sum_1^\infty c_n n^{-s}$ die voldoen aan, bij vaste $k \geq 4$,

i). $(s-k)\varphi(s)$ is één gehele functie van eindig geslacht.

ii). $\varphi(s)$ voldoet aan de functionaal vergelijking

$$R(s)=(-1)^{\frac{1}{2}k} R(k-s) \qquad \text{waarin}$$
$$R(s)=(2\pi)^{-s}\Gamma(s)\varphi(s).$$

Er is steeds minstens een functie $\varphi(s)$ te weten $\zeta(s)\,\zeta(s-k+1)$

$$\varphi(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sigma_{k-1}(n)}{n^s}$$

Deze $\varphi(s)$ heeft bij $s=k$ een pool van de eerste orde.

Andere oplossingen, die we dus bij $s=k$ regulier mogen veronderstellen bestaan slechts als $k=12$ of $k\geq 16$. In deze gevallen is er ook steeds een oplossing, die in $s=k$ regulier is en een Euler-product ontwikkeling

$$\varphi(s)=\prod_p\left(1-c_p p^{-s}+p^{k-1-2s}\right)^{-1}=\sum\frac{c_n}{n^s}$$

bezit.

De Dirichletreeksen behorende bij de functies

$$\Delta(\tau), \quad \Delta(\tau)G_i(\tau) \qquad (i=4,6,8,10,14)$$

hebben steeds een Euler product van de boven aangegeven gedaante.

($G_i(\tau)$ is de in § 2. pag. 5 gedefinieerde Eisenstein reeks

$G_i=\sum'_{m,n}(m\tau+n)^{-i}$)

De ontwikkeling voor $\Delta(\tau)$ als een Eulerproduct werd door Ramanujan [1] vermoed en door Mordell [1] bewezen, (pag. 4).

Door lineaire combinaties te vormen van de functies $\Delta^2(\tau)$ en $\Delta(\tau)G_{12}(\tau)$ kunnen we twee modulaire vormen krijgen, waarvan de toegevoegde Dirichletreeksen een Eulerproduct ontwikkeling bezitten. De coefficienten van deze lineaire combinaties zijn getallen uit het lichaam $K(\sqrt{144169})$

, dat uit het lichaam van de rationale getallen ontstaat door adjunctie van de wortel uit het priemgetal 144169. (Hecke [4,5])
Uit de formule $\sum \frac{c_m}{m^s} = \prod_p (1 - c_p p^{-s} + p^{k-1-2s})^{-1}$
volgen direct de formules

$$c_{mn} = c_m c_n \quad \text{als } (m,n)=1$$
$$c_{p^\alpha} = c_p c_{p^{\alpha-1}} + p^{k-1} c_{p^{\alpha-2}}$$

of samengevat

$$c_m c_n = \sum_{d \mid m,n} c\left(\frac{mn}{d^2}\right) d^{k-1}$$

In het bijzonder voldoet de analytische functie

$$\phi(s) = \sum \frac{\tau(n)}{n^s}$$

dus aan de functionaal vergelijking

$$\Gamma(s)\,\phi(s) = (2\pi)^{2s-12}\,\Gamma(12-s)\,\phi(12-s)$$

De Dirichletreeks convergeert als $R(s) > \frac{13}{2}$, zoals uit de schatting $\sum_1^x \tau^2(n) = O(x^{12})$ volgt. Voor $R(s) > \frac{13}{2}$ heeft $\phi(s)$ geen nulpunten, afgezien van triviale nulpunten liggen dus alle nulpunten in de strook $\frac{1}{2} \le R(s) \le \frac{13}{2}$. We kunnen nog bewijzen dat geen nulpunten op de lijnen $R(s) = \frac{1}{2}$ en $\frac{13}{2}$ liggen (Rankin [1]) en dat er oneindig veel op de rechte $R(s) = 6$ liggen (Wilton [1]). Het vermoeden dat alle nulpunten van $\phi(s)$ op de rechte $R(s) = 6$ liggen is niet bewezen.

Tot slot van deze § schrijven we als losse opmerking de formule

$$\sum_1^\infty \tau(n)\, e^{-s\sqrt{n}} = (2\pi)^{\frac{25}{2}}\,\Gamma\left(\tfrac{25}{2}\right) \sum_1^\infty \frac{\tau(n)}{(s^2+4n\pi^2)^{\frac{25}{4}}}$$

neer.
(Hardy [3]).

§ 5. Even kwadratische vormen met determinant 1.

Je trône dans l'azur comme un sphinx incompris;
J'unis un cœur de neige à la blancheur des cygnes;
Je hais le mouvement qui déplace les lignes,
Et jamais je ne pleure et jamais je ne ris.

Les poetes devant mes grandes attitudes,
Que j'ai l'air d'emprunter aux plus fiers monuments,
Consumeront leur jours en d'austères études;

Car j'ai, pour fasciner ces dociles amants,
De purs miroirs qui font toutes choses plus belles:
Mes yeux, mes larges yeux aux clartés éternelles!

(Ch. Baudelaire: Les fleurs du mal: La Beauté)

Laat $Q(x_1, x_2, \ldots\ldots x_f)$ een kwadratische vorm $q_{11}x_1^2 + q_{12}x_1x_2 + \ldots\ldots$ met gehele coefficienten q_{ij} zijn. We definieren een theta reeks

$$\vartheta(Q,\tau) = \sum_{m_1,\ldots\ldots,m_f} e^{2\pi i \tau Q(m_1,\ldots\ldots,m_f)}$$

De vorm $2Q(m_1,\ldots\ldots,m_f)$ is te schrijven als $a_{11}m_1^2 + 2a_{12}m_1m_2 + a_{22}m_2^2 + \ldots\ldots$ waarin de getallen a_{ii} even zijn en de getallen a_{ij} geheel. Zo'n kwadratische vorm heet een even kwadratische vorm. Het gedrag van deze thetareeksen onder modulaire substituties is onderzocht door Schoeneberg [1] en (voor iets anders gedefinieerde ϑ functies) door Kloosterman [3].
Het blijkt dat als f even is er een N is te vinden zodat onder alle substitutie $\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ (mod N) de ϑ functie een modulaire vorm van dimensie $-\frac{1}{2}f$ is. Het kleinste getal N dat hieraan voldoet noemt men wel de trap (Stufe) van de ϑ functie (e.v. van de kwadratische vorm). Op een eventuele factor 2 na, is deze trap gelijk aan de grootste elementaire deler van de matrix $A = (a_{ij})$ behorende bij de vorm Q. Het zal dus van belang zijn om die vormen te bepalen waarvoor $|A| = 1$. Deze hangen nauw samen met modulaire vormen van dimensie $-\frac{1}{2}f$. Een nodige en voldoende voorwaarde voor het bestaan van even kwadratische vormen met determinant 1 is $f \equiv 0 \pmod 8$.

Een door Korkine en Zolotareff [1] gegeven voorbeeld van zulk een vorm luidt: $Q_8 = \sum_{i=1}^{8} x_i^2 + \left(\sum_{i=1}^{8} x_i\right)^2 - 2x_1x_2 - 2x_2x_8$

Alle even kwadratische vormen in 8 variabelen met determinant 1 zijn door gehele rationale substituties in elkaar over te voeren (er is maar één klasse).

Het aantal manieren waarop een getal 2n door zo'n vorm in 8 variabelen voorgesteld kan worden is $240\,\sigma_3(n)$.
Er zijn twee klassen van een kwadratische vormen in 16 variabelen met determinant 1. Voor iedere vorm Q_{16} geldt evenwel dat een getal 2n op $480\,\sigma_7(n)$ manieren er door voorgesteld kan worden.

We willen even algemeen proberen iets te zeggen over het aantal oplossingen van de Diophantische vergelijking $n = Q_{8l}(x_1,\ldots\ldots,x_{8l})$; d.i. het aantal representaties van 2n door de even vorm $2Q_{8l}$ met det. 1.

Omdat we $f \equiv 0 \pmod 8$ veronderstellen is de functie $\vartheta(\tau, Q_{8l})$ een modulaire vorm met dimensie $-\frac{1}{2}f = -4l$. Door van de ϑ functie een met een geschikt gekozen constante vermenigvuldigde Eisensteinreeks af te trekken verkrijgen we een "spitzenform" (zie § 2, pag 5)

We zien direct dat

$$\vartheta(\tau, Q_{8l}) - \frac{(2\pi)^{4l}}{\Gamma(4l)\,\zeta(4l)}\, G_{4l}(\tau) = \vartheta(\tau, Q_{8l}) - 1 - \frac{(2\pi)^{4l}}{\Gamma(4l)\,\zeta(4l)} \sum_{1}^{\infty} \sigma_{4l-1}(n)\, x^n$$

een spitzenform van de dimensie $-4l$ is.
Maar we hadden gezien in § 2, dat er voor $4l < 12$, d.i. voor $l = 1,2$ geen "spitzenformen" van dimensie $-4l$ bestonden! Deze functie moet dus identiek nul zijn. Gelijkstelling van de coefficienten van x^n in de ontwikkelingen van $\vartheta(\tau, Q_{8l})$ en $\frac{(2\pi)^{4l}}{\Gamma(4l)\,\zeta(4l)}\, G_{4l}(\tau)$ voor $l = 1.2$ geeft de boven vermelde resultaten.

Voor $l = 3$ bestaat er één "spitzenform" van dimensie -12, te weten $\Delta(\tau)$. Voor iedere even vorm $2Q_{24}$ met $\det 1$ geldt dus voor het aantal manieren waarop 2n door deze vorm is voor te stellen:

$$a(n, Q_{24}) = \frac{65520}{691}\sigma_{11}(n) + c.\tau(n)$$

Kiezen we voor $Q_{24}(x_1, \ldots x_{24})$ de vorm $Q^*_{24}(x_1, \ldots x_{24}) \equiv Q_8(x_1, \ldots, x_8) + Q_8(x_9, \ldots, x_{16}) + Q_8(x_{17}, \ldots, x_{24})$ dan vinden we door substitutie van n = 1, uit

$$3.240 = \frac{65520}{691} + c.1$$

dat $c = \frac{432000}{691}$ en dus $Q(n, Q^*_{24}) = \frac{65520}{691}\sigma_{11}(n) + \frac{432000}{691}\tau(n)$

Opmerking: Hieruit volgt dat $65520\,\sigma_{11}(n) + 432000\,\tau(n) \equiv 0 \pmod{691}$ d.w.z. $\tau(n) \equiv \sigma_{11}(n) \pmod{691}$

Uit de algemene theorie van de kwadratische vormen van Siegel[1] volgt dat er twee vormen Q^{**}_{24} en Q^{***}_{24} moeten bestaan, zodat $2Q$ de vorm even is en det. 1 heeft waarvan de bijbehorende ϑ reeksen lineair onafhankelijk zijn. De ϑ reeksen $\vartheta(\tau, Q^{**}_{24})$ en $\vartheta(\tau, Q^{***}_{24})$ zijn lineair equivalent met $G_{12}(\tau)$ en $\Delta\tau$. Als $a^{**}_{24}(n)$ en $a^{***}_{24}(n)$ de bijbehorende aantal representaties van n voorstellen bestaan er dus steeds getallen $\lambda, \mu, \varkappa, \nu$ zodat

$$\begin{cases} \tau(n) = \lambda\, a^{**}_{24}(n) + \mu\, a^{***}_{24}(n) \\ \sigma_{11}(n) = \varkappa\, a^{**}_{24}(n) + \nu\, a^{***}_{24}(n) \end{cases}$$

§ 6. Diverse opmerkingen.

"Beaux oiseaux évaporés
Ils ont été au présent
Ceci entre parenthèses."

(P. Eluard: Poésie ininterrompue)

Naast de gewone ϑ functies kunnen we ook ϑ functies met bolfuncties beschouwen. (Schoeneberg [1], Hecke[5])

waarin $P_k(n,i)$ een bolfunctie behorende bij de kwadratische vorm Q_{2n} van de graad k voorstelt.

Deze ϑ functies zijn modulaire vormen van een zekere trap van dimensie $-n-k$. Kiezen we in het bijzonder dat $n=4$ en $2Q_8$ is de even kwadratische vorm met determinant 1, dan is

$\vartheta(\tau, P_8, Q_8)$ een modulaire vorm van dimensie -12, (trap 1). Men kan bewijzen dat voor $k>0$ de ϑ functie met bolfunctie P_k steeds een "spitzenform" is. Hieruit volgt dat $\vartheta(\tau, P_8, Q_8)$ op een constante factor na gelijk is aan $\Delta(\tau)$. Deze constante factor is niet nul en kan dus in P_8 opgenomen worden. We vinden dan een formule

$\tau(n) = \sum P_8(m_1, \dots m_8)$, waarin gesommeerd moet worden over alle $(m_1, \dots m_8)$ met $Q_8(m_1, \dots m_8) = n$.

Een nauwkeurige analyse geeft (Hecke [5] pag 86-89) als

$2Q_8(x) = \sum_{r,s=1}^{8} a_{rs} x_r x_s$ de even vorm met det. 1 voorstelt: en

$A_8(x,\alpha) = \sum_{r,s=1}^{8} a_{rs} x_r \alpha_s$ de formule

$$\tau(n) = \frac{1}{144}\left[\sum_{Q_8(m)=n} A_8(m,\alpha) - 480 n^3 \sigma_3(n)\right]$$

II. Naast de modulaire vormen van trap 1, zijn ook modulaire vormen van hogere trap reeds uitgebreid onderzocht. We vermelden een resultaat betrekking hebbend op trap 4. Laat $r_{24}(n)$ het aantal oplossingen in gehele rationale getallen van $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{24}^2 = n$ betekenen. Dan geldt:

$$r_{24}(n) = \frac{16}{691}\sigma_{11}^*(n) + \frac{128}{691}\left\{(-1)^{n-1} 259\,\tau(n) - 512\,\tau\left(\tfrac{1}{2}n\right)\right\},$$

hierin is $\tau(k+\tfrac{1}{2}) = 0$, k gehele waarden van k en 1 voor

$\sigma_{11}^*(n) = \sigma_{11}(n)$ als n oneven is;

$\sigma_{11}^*(n) =$ (som van de 11de machten van even delers van n) - (som van de 11de machten van oneven delers van n) als n even is.
(Ramanujan [4], Hardy [3])

III Laat Q een quadratische vorm in 24 variabelen zijn met determinant q^{12} en trap q (q is oneven priemgetal). Laat Q^* de primitieve geadjungeerde van Q zijn, d.i. de gewone geadjungeerde gedeeld door de G.G.D. van zijn coefficienten. Dan geldt de opmerkelijke stelling
(Hecke [5] pag 95)

$$q^{l-1}\,a(m,Q) + a(mq,Q^*) = (1+q^{l-1})\,\frac{65520}{691}\sigma_{11}(m) + a_1\tau(m)$$
$$q^{11-l}\,a(m,Q^*) + a(mq,Q) = (1+q^{11-l})\,\frac{65520}{691}\sigma_{11}(m) + a_2\tau(m)$$

(a(m,Q) stelt weer het aantal representaties van m door de vorm Q voor)

IV. Er is een "spitzenform" van dimensie -2 en de trap 11 te weten

$$j(\tau)=\sqrt[12]{\Delta(\tau).\Delta(11\tau)}=X-2X^2-X^3+2X^4+\ldots\ldots+0.X^{10}+\ldots\ldots$$

Er zijn drie klassen van kwadratische vormen met determinant 121 en trap 11. (Hecke [5] pag 116/7)

"Nimmer belijd ik mijn dwaling, mijn swak.
Voor dezen blinden muur zal 'k blijven kruisen
Tot 't eind der wereld met mijn trouwe wrak,
Waarop drie kale masten: galgen? kruisen?"

(J. Slauerhoff: De ontdekker)

§7. LITERATUURLIJST.

Onderstaande literatuurlijst is, vooral wat publicaties van voor 1940 betreft, onvolledig. We verwijzen in het bijzonder naar de literatuuropgaven in de "Collected Papers of S.Ramanujan", Cambr.U.P.1927 en Hardy [3].

Over partities vindt men een reeks literatuuropgaven bij Hardy Wright [6] en bij Kloosterman [2] Voor ieder citaat is het no.van de § vermeld, waarop het artikel in het bijzonder betrekking heeft.

§	no	Naam en titel
		Rambab, R.P.:
1	1	Two congruence properties of Ramanujan's function $\tau(n)$ London Math.Soc.Journ.21 (1946) p.91-93.
1	2	Ramanujan's function $\tau(n)$ - a congruence property. Bull.of the Amer.Math.Soc.53 (1947) p.764 - 5.
		Rambab, RP en Chowla, S:
1	3	A new congruence property of Ramanujan's function $\tau(n)$ Bull.of the Amer.Math.Soc.53 (1947) p.768-9.
1	4	Congruence properties of Ramanujan's function $\tau(n)$ Bull.of the Amer.Math.Soc.53 (1947) p.950-955.
		Rambab, R.P. en Chowla, S en Gupta, H:
1	5	A congruence property of Ramanujan's function $\tau(n)$ Bull.of the Amer.Math.Soc.53 (1947) p.766-7.
		Banerjee, D.P.:
1	1	On the new congruence properties of the arithmatic function $\tau(n)$ Proc.Nat.Ac.Sci.India Sect.A 12 (1942) p.149-150.
1	2	Congruence properties of Ramanujan's function $\tau(n)$ J.London Math.Soc.17 (1942) p.144-145.
1	3	On the application of the congruence properties of Ramanujan's function to certain quaternary forms. Bull.Calcutta Math.Soc.37 (1945) p.24-26.
		Davenport, H.:
3	1	On certain exponential sums. Journal für Math.169 (1933) p.158-176.
		Esterman, T.:
3	1	Vereinfachter Beweis eines Satzes von Kloosterman. abh.Math.Sem.Ham.(1929) 7 p.82-98.
		Feldmann, H.:
2	1	Über das Verhalten der Modulfunktionen von primzahlstufe bei beliebige Modulsubstitutionen. Abh.Math.Sem.Ham. 8 (1931).
		Franklin, F.:
1	1	Comptes Rendus Paris 92 (1881) p.448-450.
		Gupta, H.:
1	1	Congruence properties of $\tau(n)$ Proc.Benares Math.Soc.5 (1943) p.17-22.
1	2	A congruence property between $\tau(n)$ and $\sigma(n)$ Journ.of Indian Math.Soc. 9 (1945) p.59-60.
1	3	A congruence property of $\tau(n)$ Indian Ac.of Sci.Sect.A. 24 (1946) p.441-442.
		Hardy, G.H.:
3	1	Note on Ramanujan's arithmetical function $\tau(n)$ Proc.Cambr.Phil.Soc. 21 (1917) p.675-680.
3	2	A further note on Ramanujan's arithmetical function $\tau(n)$ Proc.Cambr.Phil.Soc.34 (1938) p.309-315.
	3	Ramanujan, Twelve Lectures. Cambridge U.P.1940.

§	No	Naam en titel
		Hardy, G.H. en Ramanujan, S.:
3	4	Asymptotic formulae in combinatory analysis. Proc.Lond.Math.Soc.(2) 17 (1918) p.75-115. = Coll.Pap.of Ramanujan p.276-309.
3	5	On the coefficients in the expansions of certain modular functions. Proc.Royal Soc.Sect.A 95 (1919) p.144-155. = Coll.Pap.of Ramanujan p.310-332.
		Hardy, G.H. and Wright, E.M.:
	6	Introduction in the theory of numbers. Oxford U.P.1938.
		Hecke, E.:
2,3	1	Theorie der Eisensteinsche Reihen höherer Stufe. Abh.Math.Sem.Hamb. 5 (1927) p.199.
2,4,5	2	Die Primzahlen in der Theorie der elliptischen Modulfunktionen Det.Kgl.Dansk.Vid.Sk: Math.fysisk.Medd. 13 (1935).
2,4,5	3	Neuere fortschritte in der Theorie der elliptischen Modulfunktionen. Compt.Rend.du Congr.Intern.des Math.Oslo 1936 p.140-156.
4	4	Über Modulfunktionen und die Dirichletschen Reihen mit Eulerscher Productentwicklung. I Math.Ann. 114 (1937) p.1-28. II " " " " p.316-351.
	5	Analytische Arithmetik der positiven quadratischen Formen. Det.Kgl.Dansk.Vid.Sk:Math.fysisk.Medd. 17 (1940).
		Kloosterman, H.D.:
3	1	Asymptotische formeln für die Fourier Koeffizienten ganzer Modulformen. Abh.Math.Sem.Hamb. 5 (1927) p.337-352.
3	2	Partisies. Euclides 21 (1945/6) p.67-77.
5	3	The behaviour of general thetafunctions under the modular group and the characters of binary modular congurence groups I, II. Ann.of Math. 47 (1946) p.317-447.
		Korkine en Zolotareff:
5	1	Math.Ann.6 (1873) p.366-389.
		Lahiri, D.B.:
1	1	Congruence properties of Ramanujan's function $\tau(n)$ Science and Culture 12 (1946) p.52.
1	2	On a type of series involving the partition function with application to certain congruence relations. Bull.Calcutta Math.Soc. 38 (1946) p.125-132.
1	3	On Ramanujan's function $\tau(n)$ and the divisor function $\sigma_k(n)$ I Bull.Calcutta Math.Soc. 38 (1946) p.193-206. II " " " " 39 (1947) p.33-51.
		Lehmer, D.H.:
3	1	Properties of the coefficients of the modular invariant Amer.Journ.of Math. 64 (1942) p.488-502.
1	2	Ramanujan's function $\tau(n)$ Duke Math.Journal 10 (1943) p.483-492.
1	3	The vanishing of Ramanujan's function $\tau(n)$ Duke Math.Journal 14 (1947) p.429-433.
		Lehner, J.:
3	1	A partition functionconnected with the modulus five. Duke Math.Journal 8 (1941) p.631-655.
		Mordell, L.J.:
2,4	1	On Mr.Ramanujan's empirical expansions of modular functions. Proc.Cambr.Phil.Soc. 19 (1917) 117-124.
5	2	The definite quadratic form in eight variables with determinant unity. Journal de Math.17 (1938) p.41-46.

§	No	Naam en titel.
		Niven, I.:
3	1	On a certain partition function. Amer. J. Math. 62 (1940) p.353-364.
		Petersson, H.:
3	1	Über die Entwicklungskoeffizienten der automorphen Formen. Acta Math. 58 (1932) p.169-215.
2,3,5	2	Über die Entwicklungskoeffizienten der ganzen Modulformen und ihre bedeutung für die Zahlentheorie. Abh. Math. Sem. Hamb. 8 (1930) p.215-242.
4	3	Konstruktion der sämtlichen Lösungen einer Riemannsche Funktionalgleichung durch Dirichlet Reihen mit Eulerscher Produktentwicklung. I Math. Ann. 116 (1939) p.401-412. II " " 117 (1939) p.39-64. III " " 117 (1939) p.277-300.
		Rademacher, H.:
2,3	1	Zur Theorie der Modulfunktionen. Journal für die reine und ang. Math. 167 (1931) p.312-336.
3	2	Eine Arithmetische Summenformel Monatshefte für Math. und Physik 139 (1932). p.221-228.
3	3	Bestimmung einer gewissen Einheitswurzel in der Theorie der Modulfunktionen. Journ. London Math. Soc. 7 (1932) p.14-19.
3	4	A convergent series for the partition function Proc. Nat. Ac. of Sc. U.S.A. 23 (1937) p.78-84.
3	5	On the partition function $p(n)$ Proc. London Math. Soc. (2). 43 (1937) p.241-254.
3	6	The Fourier coefficients of the modular invariant $J(\tau)$ Amer. J. Of Math. 60 (1938) p.501-512.
3	7	The Fourier series and the functional equation of the absolute modular invariant $J(\tau)$ Amer. J. Of Math. 61 (1939) p.237-248.
2	8	The Ramanujan identities under modular substitutions. Trans. amer. Math. Soc. 51 (1942) p.609-636.
		Rademacher, H. en Zuckerman, H.S.:
3	9	On the Fourier coefficients of certain modular forms of positive dimension. Ann. of Math. (2) 39 (1938) p.433-462.
2	10	A new proof of two of Ramanujan's identities. Ann. of Math. (2) 40 (1939) p.473-489.
		Ramanujan, S.:
1		On certain arithmetical functions. Trans. Cambr. Phil. Soc. 22 (1916) p.159-184= C.P. p.136-162.
1	2	Congruence properties of partitions. Proc. London Math. Soc. 18 (1919) p.xix-xx = C.P. p.230.
1	3	Congruence properties of partitions. Math. Zeitschrift. 9 (1921) p.147-153 = C.P. p.232-238.
		Ramanathan, K.G.:
1,4	1	Multiplicative arithmetic functions. J. Indian Math. Soc. 7 (1943) p.111 - 116.
1	2	Congruence properties of Ramanujan's function $\tau(n)$ I Proc. Indian Acad. Sci. Sect. A. 19 (1944) p.146-148. II Journ. Indian Math. Soc. 9 (1945) p.55-59.
		Rankin, R.A.:
3,4	1	Contributions to the theory of Ramanujan's function $\tau(n)$ and similar arithmetical functions. I Proc. Cambr. Phil. Soc. 35 (1939) p.351-356. II " " " " 35 (1939) p.357-372. III " " " " 36 (1940) p.150-151.

§	No.	Naam en titel.
		Salié,H.:
3	1	Zur Abschätzung der Fourierkoeffizienten ganzer Modulformen. Math.Zeibehr. 36 (1933).p.263-278.
		Schoeneberg,B.:
5	1	Das Verhalten von mehrfachen Thetareihen bei Modulsubstitutionen. Math. Ann. 116 (1939).p.511-523,780.
		Siegel,C.L.:
5	1	Über die analytische Theorie der quadratischen Formen. I Ann.of Math.(2) 36 (1935) p.527-606.
		Simons,W.H.:
1	1	Congruences involving the partition function $p(n)$ Bull.Amer.Math.Soc.50 (1944) p.883-892.
		Watson,G.N.:
	1	Ramanujan's Note Books J.London Math.Soc.6 (1931) p.137-153.
		Wilton,J.R.:
3,4	1	A note on Ramanujan's arithmetical function $\tau(n)$ Proc.Cambr.Phil.Soc.25 (1928) p.121-129.
1	2	Congruence properties of Ramanujan's function $\tau(n)$ Proc.London Math.Soc.(2) 31 (1930) p.1-10.
		Zuckerman,H.S.:
3	1	On the coefficients of certain modular forms belonging to subgroups of the modular group. Trans.Amer.Math.Soc.45(1939) p.298-321.